Ogólna teoria całki
Lista 4

Zad 1. Niech μ_F będzie miarą daną przez dystrybuantę F. Obliczyć całkę $\int_X f(x)\,d\mu_F(x)$, gdzie

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \frac{1}{3}], \\ x^2 & x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathcal{C}, \\ x \ln x & x \in \mathcal{C}, \end{cases}$ $\qquad X = \mathbb{R}$,

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{3}x & x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \\ 1 & x \in (\frac{2}{3}, +\infty) \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathcal{C}, \\ x & x \in \mathcal{C}, \end{cases}$ $\qquad X = \mathbb{R}$,

c) F jest dystrybuantą Cantora, $f(x) = x$, $X = [-5, 7]$,

d) $F(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0, \frac{1}{4}], \\ x+1 & x \in (\frac{1}{4}, 2], \\ 5 & x \in (2, 3] \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 3^n, & x \in [\frac{1}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}) \setminus \mathcal{C}, \\ \operatorname{arctg} x & x \in \mathcal{C}, \\ x \ln x & x \in (1, 3] \end{cases}$ $\qquad X = [0, 3]$.

Zad 2. Niech $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą liczącą. Zbadać zbieżność jednostajną ciągu funkcyjnego $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz zbieżność ciągu całek $\int_{\mathbb{N}} f_n\,d\mu$, gdy

$$a) \quad f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le k \le n, \\ 0 & k > n, \end{cases} \qquad b) \quad f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \le k \le n, \\ 0 & k > n, \end{cases}.$$

Zad 3. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą skończoną. Pokazać, że jeśli ciąg funkcji $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ całkowalnych zbiega jednostajnie do funkcji f, to $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

Zad 4. Obliczyć $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ oraz $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$, gdy

$$a) \quad f_n = \begin{cases} I_{[0,\frac{1}{2}]}, & n \text{ jest nieparzyste}, \\ I_{[\frac{1}{2},0]} & n \text{ jest parzyste}, \end{cases} \qquad b) \quad f_n = \frac{1}{n} I_{[-n,n]}, \qquad b) \quad f_n = n I_{[n,n+\frac{1}{n}]}.$$

Zad 5. Obliczyć granice z następujących wyrażeń

$$a) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin^n x\,dx, \qquad b) \quad \int_0^1 \sqrt[n]{x} \ln x\,dx,$$

$$c) \quad \int_0^\infty \frac{(1+x)^n}{1+(1+x)^n}\,e^{-x}\,dx, \qquad d) \quad \int_{\{x:|x|\le 1-\frac{1}{n}\}} \frac{x^{2n}}{2n}\,dx,$$

$$e) \quad \Sigma_{k=1}^\infty \exp\left\{-k\left(2+\cos\frac{k}{n}\right)\right\}, \qquad f) \quad \Sigma_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\left(1-\frac{\min(k,n)}{n}\right).$$

Zad 6. Łatwo odgadnąć granice całek:

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx, \qquad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx.$$

Sprawdzić, czy zostały one odgadnięte poprawnie.